

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE SEGUNDO E QUARTO GRAUS DA CURVA CATENÁRIA: VERIFICANDO A CRENÇA DE GALILEU

Modalidade: () Ensino (X) Pesquisa () Extensão

Nível: (X) Médio () Superior () Pós-graduação

Área: () Química () Informática () Ciências Agrárias () Educação (X) Multidisciplinar

Autores : Geisyane Karina GONZAGA, Bianca Stipp MARTINS, Vanessa Neves HÖPNER, Adriano Rodrigues de MELO.
Identificação autores: Bolsista PIBIC-EM/CNPq; Colaboradora do Projeto; Orientadora do IFC - Campus Araquari;
Co-orientador do IFC - Campus Araquari.

Introdução

O presente trabalho está inserido no contexto do projeto de pesquisa intitulado “A Contextualização da Matemática Através das Redes Sociais” (facebook.com/oshowdamatematica) apoiado pelo IFC – Campus Araquari e pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil), que tem como objetivo a busca pelo significado no cotidiano de certos conceitos e/ou conteúdos da disciplina de Matemática. Diante das várias pesquisas realizadas sobre diversos temas da matemática no Ensino Médio, apresenta-se nestas notas àquela realizada e aprofundada, em certa medida, focando-se em aplicações da função exponencial. Após pesquisar em diversos sites e ler alguns trabalhos e artigos sobre o assunto, obteve-se a conclusão de que a curva catenária se encaixa como uma de suas aplicações, já que

$$y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{-k}{x}} + e^{\frac{k}{x}} \right) \quad (1)$$

é uma função exponencial. Devido a curiosidade despertada pelo assunto, foi decidido que tais curvas continuariam a ser estudadas.

Segundo Talavera (2008) “uma curva catenária representa um cabo em suspensão cujas extremidades estão presas em duas hastes e está sob efeito apenas da força da gravidade”.

Quem primeiro observou esse tipo de curva foi Galileu Galilei, porém este matemático italiano acreditava que tratavam-se de parábolas. Em 1647, um jovem holandês de apenas 17 anos, Christiaan Huygens, “investigou a geometria da catenária (a curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical)” (Eves, 2011) e determinou “com argumentos físicos, que a conjectura era falsa sem, contudo, descobrir a expressão analítica da curva” (Faria, 2011). Mais tarde, em 1669, Joachin Junguis confirmou o que Christiaan Huygens já havia dito e inclusive publicou um trabalho sobre a curva catenária não ser uma parábola. Porém, foi em 1690 que surgiu um desafio feito por Jakob Bernoulli para os grandes matemáticos, que consistia na determinação de uma função que representasse a curva

catenária. Então, três importantes matemáticos (Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz e Johann Bernoulli) propuseram três soluções, descrevendo a curva geometricamente, mas sem explicar o método de resolver o problema. Posteriormente, “Huygens mostrou que o problema poderia ser resolvido através do estilo clássico (euclidiano) e Leibniz e Bernoulli resolveram através do cálculo diferencial, sendo suas soluções muito mais diretas que de Huygens” (Faria, 2011). Mas... e se Galileu Galilei estivesse certo? Até que ponto podemos aproximar, com uma insignificante margem de erro, uma função polinomial de segundo grau com a função da Curva Catenária? A partir desse questionamento, surge o objetivo do presente trabalho.

Material e Métodos

Para realizar a comparação entre a função da Curva Catenária dada pela Equação (1) e a função polinomial de segundo grau

$$y = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

com os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é necessário forçar que os valores da função aproximada seja os mesmos da Curva Catenária, para isso define-se quais os pontos que serão utilizados na interpolação: uma das extremidades do cabo (x_1, y_1) e o menor ponto que o cabo em suspensão atinge $(0, k)$ como vértice da parábola, sendo k um valor fixo, que podem ser observados na figura 1:

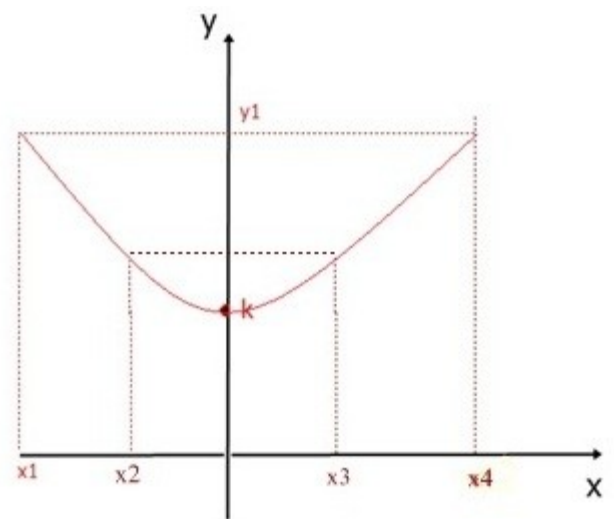


Figura 1 – Representação da Curva Catenária

A partir da fórmula do ponto mínimo (vértice), proveniente da forma canônica da função polinomial de segundo grau e utilizando o ponto $(0, k)$, determinam-se os parâmetros b e c da Equação (2):

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow b = 0 \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow k = \frac{-(0^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow k = c \quad (3)$$

Para a determinação do parâmetro a , substituem-se na Equação (2) os resultados encontrados acima, $k = c$, $b = 0$, $y = y_1$ e $x = x_1$. Logo:

$$y_1 = ax_1^2 + k \Rightarrow a = \frac{y_1 - k}{x_1^2} \quad (4)$$

Por fim, é possível apresentar a função polinomial de segundo grau que será utilizada para realizar as comparações com a Curva Catenária, para $k \geq 0$:

$$y = \left(\frac{y_1 - k}{x_1^2} \right) x^2 + k \quad (5)$$

No decorrer das discussões sobre as possíveis aproximações de diversas funções, decidiu-se estudar as polinomiais de quarto grau para observar se as aproximações (caso possíveis de serem feitas) apresentariam margens de erro menores do que as obtidas com a parábola, segundo o que Galileu acreditava. Assim, a função:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (6)$$

foi aderida ao trabalho, pois comporta-se como parábolas no infinito. Para determinar os parâmetros da função polinomial de quarto grau dada pela Equação (6), foi utilizado sistema (7) abaixo, calculando a matriz inversa e resolvendo a equação matricial $X = A^{-1}B$ (8).

$$\begin{aligned} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e &= y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e &= y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e &= y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e &= y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e &= y_5 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Com } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

sendo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) pontos da Curva Catenária e, novamente, o menor ponto que o cabo em suspensão atinge $(0, k)$, para diversos valores de k .

Resultados e discussão

As figuras a seguir fornecem um comparativo visual entre os gráficos das funções de segundo e quarto grau utilizadas na aproximação com a curva catenária. Foram simuladas situações com diferentes valores para o parâmetro k e intervalos de variação de x .

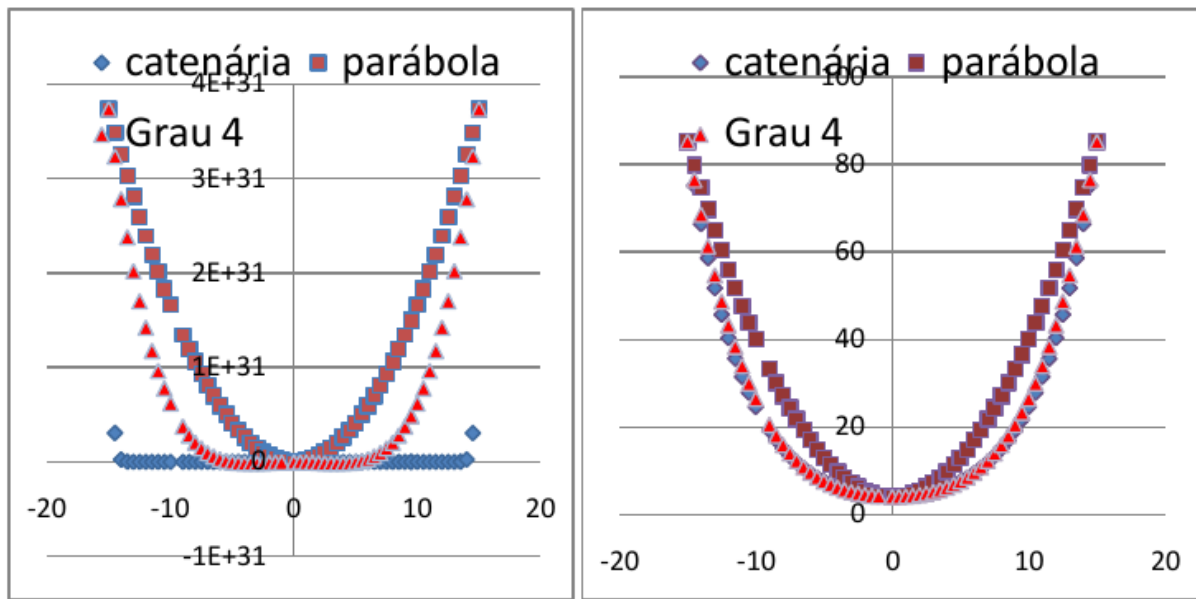


Figura 2 – Comparando a curva catenária com as funções polinomiais de segundo e de quarto grau para $k = 0,2$ (esquerda) e $k = 4$ (direita), sendo $|x| = 15$.

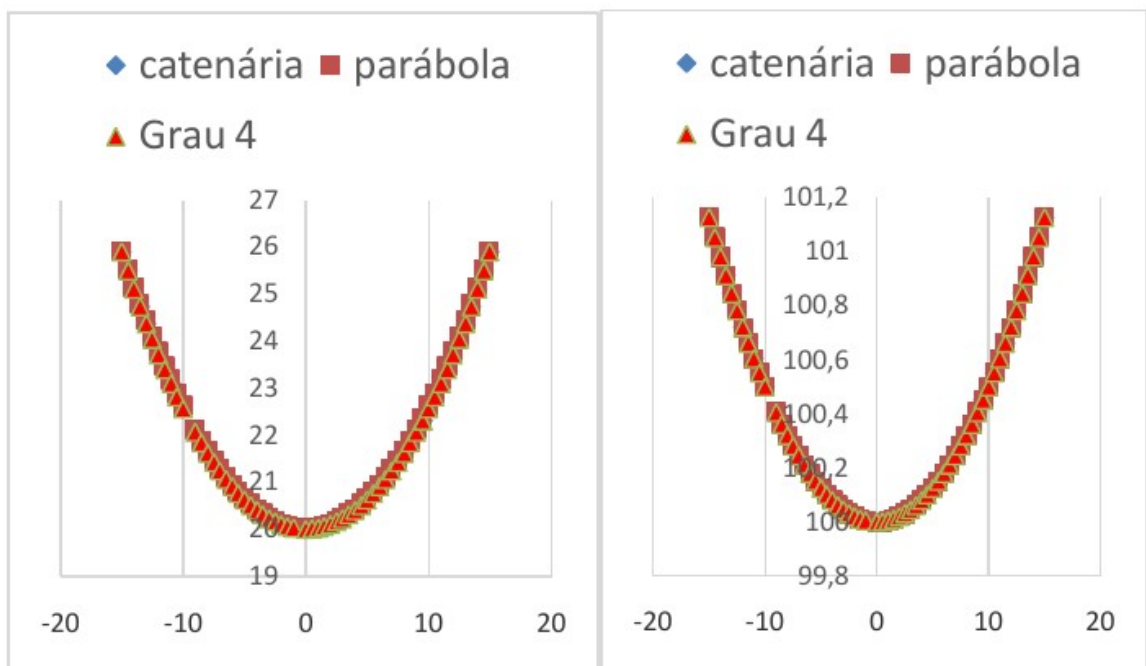


Figura 3 – Comparando a curva catenária com as funções polinomiais de segundo e de quarto grau para $k = 20$ (esquerda) e $k = 100$ (direita), sendo $|x| = 15$.

Pode-se dizer que quanto maior a distância entre o módulo de x e o valor de k , menos visível é a margem de erro, ou seja, a aproximação dos valores é de fato muito boa. Na planilha, com um incremento de $+0.5$, com x de -15 a 15 , o melhor valor observado foi o de $k = 15500$.

Contudo, deve-se considerar que em situações reais o k no eixo y está diretamente relacionado à altura, e que, portanto, seu valor jamais ultrapassará um limite dentro do possível, ou seja, na maioria dos casos o k assume valores proporcionais à variação do intervalo de x .

Tabela 1 – Erro médio das funções polinomiais de segundo (β) e quarto grau (γ) em comparação a curva catenária (α).

k	0,2	4	20	100
α, β	8,63645E+31	55,39579522	0,236503276	0,001843216
α, γ	5,8846E+31	8,191385232	0,001734884	5,45934E-07

Quando os valores assumidos por k são pequenos quanto ao intervalo de x , a margem de erro das aproximações é bastante evidente na figura 2 (sendo $k= 0,2$ e $k=20$, respectivamente). Entretanto, quando o valor de k aumenta quanto ao intervalo de x , os resultados se tornam melhores (ou seja, a margem de erro é menor), tais como na figura 3 (para $k= 20$ e $k= 100$).

Conforme os dados apresentados acima, pode-se dizer que os resultados obtidos pela função polinomial de quarto grau são melhores que os de segundo grau.

Conclusão

Conclui-se que para grandes valores de k em relação ao intervalo de x (como $k= 100$, por exemplo) é plausível acreditar que Galileu estivesse certo, pois conforme visto na Tabela 1, a margem de erro é muito pequena, tornando as aproximações das funções polinomiais de segundo e quarto grau à curva catenária muito boa. O mesmo não ocorre com pequenos valores de k em relação ao intervalo de x (como $k = 0,2$, por exemplo), cujas aproximações de tais funções à curva catenária são péssimas devido a grande margem de erro.

Referências

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FARIA, S. R. de, **A Catenária**. Belo Horizonte: UFMG, 2011.

TALAVERA, L. M. B., **Parábola e Catenária: História e Aplicações**. São Paulo, 2008.
Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20081125.pdf>. Acesso em: 13/05/16.